

اسم الطالب :  
المدة : ساعة ونصف  
العلامة : 100

امتحان مقرر التحليل ( 4 )  
لطلاب السنة الثانية رياضيات  
الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 / 2016

جامعة البعث  
كلية العلوم  
قسم الرياضيات

السؤال الأول : ( 18 علامة )

عرّف متتالية كوشي في فضاء مترى ، ثم برهن أن كل متتالية متقاربة في فضاء مترى هي متتالية كوشي .

السؤال الثاني : ( 17 علامة )

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين  $A$  و  $B$  من  $\mathbb{R}^n$  ولتكن  $a$  نقطة من  $\overline{A \cap B}$  ولنفرض وجود النهايتين  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ، فثبت أن :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

السؤال الثالث : ( 15 علامة )

ادرس وجود نهاية للدالة  $f$  المعرفة بالشكل :  $f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  حيث

$$f(x,y,z) = \frac{\sin xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ في النقطة } (0,0,0) , \text{ ثم بين فيما إذا كتبت الدالة } f \text{ مستمرة في تلك النقطة .}$$

السؤال الرابع : ( 17 علامة )

عرّف التطبيق المستمر بانتظام بين فضاءين مترين ، ثم اثبت أنه إذا كان  $(V, \|\cdot\|)$  فضاء منظمًا فإن التطبيق

$$f: V \rightarrow V ; f(x) = \alpha_0 x ; x \in V ; \alpha_0 \in \mathbb{R} \text{ مستمر بانتظام .}$$

السؤال الخامس : ( 18 علامة )

اثبت أن الدالة  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  المعرفة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ غير قابلة للمفاضلة في النقطة } (0,0) .$$

السؤال السادس : ( 15 علامة )

احسب التكامل التتالي  $I = \iint_A (x+y) dx dy$  حيث السطح  $A$  محدود بالدائرتين

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ و } x^2 + y^2 = 4 \text{ ومحور السينات حيث } y \geq 0 .$$

سلم تصحيح مقدر تحليل (ع)  
لطلاب السنة الثانية رياضيات  
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٥-٢٠١٦

٢١

السؤال الأول: [١٥]

لكل  $(E, d)$  فضاء مترياً و  $(x_n)$  متتالية في  $E$  . نقول عن  $(x_n)$  أن متتالية كوشي إذا قابل كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد صحيح موجب  $N_\epsilon$  بحيث إذا كان  $p \geq N_\epsilon$  و  $q \geq N_\epsilon$  فإن :  
 ⑤  $d(x_p, x_q) < \epsilon$   
 يمكن  $(x_n)$  متتالية متقاربة في الفضاء المتري  $(E, d)$  من النقطة  $a$  عندئذ يقابل كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد صحيح موجب  $N_\epsilon$  بحيث  
 ⑥ إذا كان  $p \geq N_\epsilon$  و  $q \geq N_\epsilon$  فإن :  $d(x_p, a) < \frac{\epsilon}{2}$  و  $d(x_q, a) < \frac{\epsilon}{2}$   
 وبالتالي :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا يعني أن  $(x_n)$  هي متتالية كوشي . ⑥

السؤال الثاني: [١٧]

نفرض أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$  عندئذ إذا كان  $\epsilon$  عدداً حقيقياً موجباً ما نثبت :

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A, d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - p| < \frac{\epsilon}{2} \quad ⑤$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in B, d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}$$

وبالتالي :

$$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A \cap B, d(x, a) < \delta \Rightarrow \quad ⑥$$

$$|f(x) + g(x) - (p + q)| \leq |f(x) - p| + |g(x) - q| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = p + q \quad \text{أي أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{والتالي: (5)}$$

### السؤال الثالث: 15

إذا أخذنا التسلسل  $(x_n, y_n, z_n)$  و  $(x'_n, y'_n, z'_n)$  بحيث أن:

$$(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0, 0)$$

$$(x'_n, y'_n, z'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0, 0) \quad (5)$$

نلاحظ أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n^3}}{\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{5}$$

وبما أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$  فإننا نستنتج استخدام

أن نتيجة معرفة  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z)$  غير موجودة وبالتالي

المسألة غير مستمرة في النقطة  $(0,0,0)$ . ①

### السؤال الرابع: 17

ليكن  $(E, d_E)$  و  $(F, d_F)$  فضاءين مترين و  $f$  تطبيقاً معرفاً على

المجموعة الجزئية  $D$  من  $E$  و يأخذ قيمته في  $F$  ، نقول عن  $f$  أنه

مستمر بالنظام  $(D, d_E)$  ، إذا قابل كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد

حقيقي موجب  $\delta$  بحيث أنه إذا كان  $x$  و  $y$  أي عنصرتين من  $D$  يحققان

$$d_E(x, y) < \delta \quad \text{فإن} \quad d_F(f(x), f(y)) < \epsilon \quad (5)$$

يتألف كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد حقيقي (6)  $\delta = \frac{\epsilon}{|a_0|}$  بحيث إذا كان  
 $x, y$  أي عنصرين من  $V$  بحيث أن  $d(x, y) = \|x - y\| < \delta$  فإن :

$$d(a_0 x, a_0 y) = \|a_0 x - a_0 y\| = |a_0| \|x - y\| < |a_0| \delta = \epsilon \quad (6)$$

أي أن التطبيق مستقر بالنظام

السؤال الخامس : 18

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

بالتعريف في السادة :

$$f(h, k) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot k + \eta(h, k) \sqrt{h^2 + k^2} \quad (6)$$

$$h \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} - 0 = h + 0 + \eta(h, k) \sqrt{h^2 + k^2} \Rightarrow$$

$$\eta(h, k) = \frac{-2hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

حيث أن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad (6)$$

فإنه لا يمكن للدالة  $\eta$  أن تتقارب من الصفر عندما  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$   
 وبالتالي فإن  $f$  غير قابلة للتفاضل في النقطة  $(0, 0)$ .

# السؤال السادس: 15

بالإشارة إلى الإحداثيات القطبية يكون

$$y = \rho \sin \theta \quad x = \rho \cos \theta \quad J = \rho$$

بالتعريف: (5)

$$I = \iint_{A'} (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^2 \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, d\rho$$

$$I = \int_0^\pi d\theta \left[ \frac{\rho^3}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \right]_0^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{7}{3} \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta$$

$$= \frac{7}{3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi = \frac{7}{3} [(0+1) - (0-1)] \stackrel{(5)}{=} \frac{14}{3}$$

د. ع. م. نيم

~~ع. م. نيم~~

